# EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

## COMMUNE AUX DEUX OPTIONS

**DUREE : 1 heure.**

*N.B. : Ce sujet comporte 2 pages de texte.*

**1.** Pour tout $x \in [-1,1]$ on note :

$$\Phi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + x\cos(\theta)}\, d\theta \quad \text{et} \quad E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2 \sin^2(\theta)}\, d\theta .$$

**a.** Calculer $\Phi(x)$ et $E(x)$ lorsque x vaut 0, – 1 ou 1.

**b.** Pour tous x et y dans $[-1,1]$ tels que : $x \leq y$, comparer $\Phi(x)$ et $\Phi(y)$.

**c.** Soit x dans $[-1,1]$. Montrer que l'on peut calculer $E(x)$ grâce à deux intégrales de la forme $\Phi(y)$ et $\Phi(-y)$ où y est un réel de $[0,1]$ dépendant de x.

**2.** Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$. On note :

$$L(a,b) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)}\, d\theta$$

**a.** Que vaut L(a,b) lorsque a = b ?

**b.** Pour a < b, exprimer L(a,b) au moyen d'une intégrale de la forme E(z) où z est un réel de ] 0, 1[ dépendant de a et b.

**3.** Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(\theta)\, d\theta$. On admettra sans démonstration la formule suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}.(n!)^2} = \frac{\pi.C_{2n}^n}{2^{2n+1}}$$

**a.** Justifier que pour tout u dans [0,1] on a l'encadrement :

$$\frac{u^3}{16} \le \left[1-\left(\frac{u}{2}+\frac{u^2}{8}\right)\right] - \sqrt{1-u} \le \frac{3u^3}{8}$$

**b.** Montrer que pour tout x dans [−1,1] on a :

$$\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{3x^4}{64}-\frac{15x^6}{128}\right) \le E(x) \le \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{3x^4}{64}-\frac{5x^6}{256}\right)$$

**c.** En déduire des valeurs approchées, les meilleures possibles (en estimant l'erreur commise), pour E(x) lorsque x prend successivement les valeurs :

(i) $x = \frac{1}{4}$ (ii) $x = \frac{1}{2}$ (iii) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (iv) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**4. a.** Donner le développement en série entière sur ]−1,1[ de l'application R définie par :
$\forall u \in ]-1,1[$, $R(u) = 1 - \sqrt{1-u^2}$.

On l'écrira sous la forme : $R(u) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k . u^{2k}$ où pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k$ sera exprimé grâce à des factorielles et au moyen d'une puissance de 2.

**b.** En déduire que pour tout $x \in ]-1,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\left| E(x) - \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k I_k x^{2k}\right) \right| \le \frac{\pi}{2} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \alpha_j . x^{2j}$$

**c.** Conclure que pour tout $x \in ]-1,1[$ : $E(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\alpha_k I_k x^{2.k}\right)$

Que peut-on en déduire sur l'application E ?

**d.** Ecrire un algorithme (en pseudo-langage ou Turbo-Pascal) permettant d'évaluer : $\sum_{k=1}^{N} \left(\alpha_k I_k x^{2.k}\right)$ pour des valeurs données de $N \in \mathbb{N}^*$ et de $x \in ]0,1[$. Cet algorithme ne devra mettre en jeu que des additions, multiplications ou divisions : pour cela on pourra commencer par simplifier $\frac{u_k}{u_{k-1}}$ ( pour $k \ge 2$) avec $u_k = \alpha_k I_k x^{2k}$.

**e.** Calculer la valeur approchée correspondante de L(1,2) en utilisant 2.b et l'approximation précédente de E(y) par $\frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{N} \left(\alpha_k I_k y^{2k}\right)$ avec N = 6. On donnera le résultat avec 3 décimales.